Varianta 24

Subiectul I.

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

b) $DE = \sqrt{11}$.

c) Ecuația tangentei este $x + y + 3 = 0$.

d) Deoarece $\frac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \frac{y_L - y_M}{x_L - x_M}$ rezultă că punctele L, M, N sunt coliniare.

e) $V_{ABCD} = \frac{1}{3}$.

f) Ecuația planului este: $x + y + z - 4 = 0$.

Subiectul II.

1.

a) De exemplu, $g \in \mathbf{Z}_4[X]$, $g(x) = \hat{2}X$.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c) $g(0) = 1$.

d) $x \in \{-1, 1\}$

e) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

2.

a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3}$.

b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4014x$.

c) $f''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, deci funcția f este concavă pe $\mathbf{R}$.

d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = -3x$.

e) $\int_0^1 (x+2) \cdot e^x \, dx = 2e - 1$.

Subiectul III.

a) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0$.

b) $\det(A) = \det(B) = 1 = \det(I_2)$.

c) Calcul direct.

d) $M = O_2$.

e) Pentru $n \in \mathbf{N}^*$, avem $O_2 = A^{3n} - B^{3n} = (A - B) \cdot S_n$, de unde rezultă că $\det(S_n) = 0$.

f) Se face tabla operației şi se verifică imediat axiomele grupului.

g) De exemplu, mulțimea $\Gamma = \{I_2, x_1 \cdot I_2, x_2 \cdot I_2\} \neq G$ este un grup cu 3 elemente din $M_2(\mathbf{C})$.

Subiectul IV.

a) $I_1(p) = \dfrac{p}{p+1}$.

b) Se arată prin calcul direct.

c) Se foloseşte punctul **b)**.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

e) Pentru $x > 0$, funcția f este o funcție Rolle pe intervalul $[x, x+1]$ şi folosind teorema lui Lagrange, obținem că există $c \in (x, x+1)$ astfel încât $\dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{x+1-x} = \dfrac{1}{c}$

$x < c < x+1 \iff \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x} \iff \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}$.

f) Înlocuindu-l succesiv pe x în partea dreaptă a inegalității din **e)** cu numerele n, $2n$, ..., n^2 şi adunând inegalitățile obținute, rezultă:

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n^2} = a_n \qquad (1)$$

Se arată că $0 < a_n < \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, de unde, aplicând criteriul cleștelui, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aplicând acum criteriul cleștelui în (1), rezultă

$\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1$.